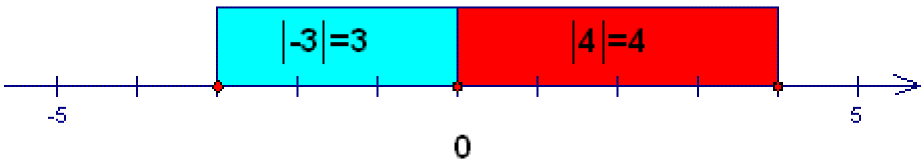
Linearne jednačine sa apsolutnom vrijednošću

Da se podsjetimo…

Apsolutna vrijednost broja je rastojanje tog broja od nule na brojevnoj pravoj. Pošto je rastojanje uvijek pozitivno, i apsolutna vrijednost će uvijek biti pozitivna. Označava se pomoću dvije uspravne crte oko broja: $|x|$.



Kada rješavamo jednačinu sa apsolutnom vrijednošću, izraz u apsolutnoj zagradi može imati jednu od dvije moguće vrijednosti: onu koja ga ostavlja pozitivnim, i onu koja mu je promijenila znak. Zato uvijek postoje dva rješenja jednačine sa apsolutnom vrijednošću.

Ako je

$$|x| = 1$$

x može biti 1 ili -1, jer je

$$|1| = 1 \quad i \quad |-1| = 1$$

Ako je

$$|x| = 13$$

x može biti 13 ili -13, jer je

$$|13| = 13 \quad i \quad |-13| = 13$$

Odavde možemo zaključiti:

$$|x| = \begin{cases} x, & za \quad x > 0 \\ -x, & za \quad x < 0 \end{cases}$$

Naravno $|0| = 0$.

Primjer 1: Provjerimo da li je

$$x = -5$$

rješenje jednačine

$$|2x-3| = 13$$

Rješenje: Zamjenimo da bi vidjeli da li je tačno:

$$\begin{gathered} |2\cdot(-5)-3| = 13 \\ |-10-3| = 13 \\ |-13| = 13 \\ 13 = 13 \end{gathered}$$

Jeste, dati broj je rješenje date jednačine.

Primjer 2: Riješimo:

$$|x+2| = 3$$

Rješenje: Izraz u apsolutnim zagradama ima dvije moguće vrijednosti:

$$\begin{array}{ccc} x+2=3 & ili & x+2=-3 \\ x=3-2 & & x=-3-2 \\ x=1 & & x=-5 \end{array}$$

Provjerimo rješenja:

$$\begin{array}{ccc} |1+2|=3 & ili & |-5+2|=3 \\ |3|=3 & & |-3|=3 \\ 3=3 & & 3=3 \end{array}$$

Primjer 3: Riješimo:

$$\left|\frac{1}{6}x-4\right| = 2$$

Rješenje: I ovdje imamo dva rješenja:

$$\frac{1}{6}x - 4 = 2 \quad ili \quad \frac{1}{6}x - 4 = -2$$

$$\frac{1}{6}x = 6 \qquad\qquad \frac{1}{6}x = 2$$

$$x = 36 \qquad\qquad x = 12$$

Provjerimo:

$$\left|\frac{1}{6}\cdot 36 - 4\right| = 2 \quad ili \quad \left|\frac{1}{6}\cdot 12 - 4\right| = 2$$

$$|6-4| = 2 \qquad\qquad |2-4| = 2$$

$$|2| = 2 \qquad\qquad |-2| = 2$$

$$2 = 2 \qquad\qquad 2 = 2$$

Evo još nekoliko zadataka!

1) $|x| = 5$

$x = -5$ $\qquad$ $x = +5$

2) $|x-1| = 2$

$x - 1 = -2$ $\qquad$ $x - 1 = +2$

$x = 1 - 2$ $\qquad$ $x = 1 + 2$

$x = -1$ $\qquad$ $x = 3$

3) $|2x-5| = 3$

$2x - 5 = -3$ $\qquad$ $2x - 5 = +3$

$2x = 5 - 3$ $\qquad$ $2x = 5 + 3$

$2x = 2 \ / : 2$ $\qquad$ $2x = 8 \ / : 2$

$x = 1$ $\qquad$ $x = 4$

U prethodnim zadacima nepoznata *x* se pojavljuje samo u jednom članu koji se nalazi u apsolutnim zagradama. Naredni primjer pokazuje kako se rješavaju zadaci u kojima se *x* nalazi i u apsolutnim zagradama i van njih.

3) $|2x-5| = 3x+1$

za: $2x-5<0$

$2x<5 \;/ : 2$

$x<\frac{5}{2}$

$-(2x-5) = 3x+1$

$-2x+5 = 3x+1$

$-2x-3x- = 1-5$

$-5x = -4 \;/ : (-5)$

$x = \frac{4}{5}$

za: $2x-5 \geq 0$

$2x \geq 5 \;/ : 2$

$x \geq \frac{5}{2}$

$+(2x-5) = 3x+1$

$2x-5 = 3x+1$

$2x-3x- = 1+5$

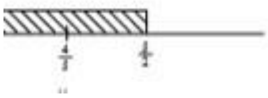
$-x = 6 \;/ : (-1)$

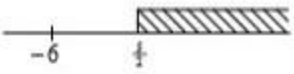
$x = -6$

Znači, kada je izraz u apsolutnoj zagradi negativan , u jednačini pišemo znak **−** ispred tog izraza i apsolutna zagrada prelazi u ˝običnu˝. U drugom slučaju piše se znak **+**.

Kada smo izračunali rješenja, moramo provjeriti da li zadovoljavaju uslove!!!

$X < \frac{5}{2}$ $x \geq \frac{5}{2}$





Na slici vidimo da rješenje x = - 6 ne zadovoljava uslov pa je jedino rješenje jednačine x = $\frac{4}{5}$.

Naredni zadatak pokazuje kako se rješava jednačina sa dvije apsolutne zagrade.

Prvo odredimo kada izrazi u apsolutnim zagradama imaju vrijednost jednaku 0.

4) $|2x-1|-|3-x|=2$

$$2x-1=0 \qquad\qquad 3-x=0$$
$$2x=-1\ /:2 \qquad\qquad -x=-3\ /:(-1)$$
$$x=\frac{1}{2} \qquad\qquad x=3$$

Zatim nacrtamo tabelu u kojoj popunimo znak izraza u apsolutnim zagradama.

$-\infty \qquad \frac{1}{2} \qquad 3 \qquad +\infty$

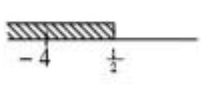
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
	I		II		III

Tako dobijemo tri slučaja za rješavanje jednačine

I $(-,+)$

$x\in\left\langle -\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle$

$$-(2x-1)-(+(3-x))=2$$
$$-2x+1-(3-x)=2$$
$$-2x+1-3+x=2$$
$$x-2x=2-1+3$$
$$-x=4\ /:(-1)$$
$$x=-4$$

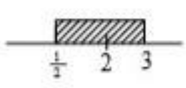


$x_1=-4$

II $(+,+)$

$x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$

$$+(2x-1)-(+(3-x))=2$$
$$2x-1-(3-x)=2$$
$$2x-1-3+x=2$$
$$2x+x=2+1+3$$
$$3x=6\ /:3$$
$$x=2$$

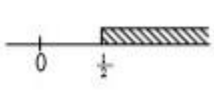


$x_2=2$

III $(+,-)$

$x\in[3,+\infty\rangle$

$$+(2x-1)-(-(3-x))=2$$
$$2x-1+(3-x)=2$$
$$2x-1+3-x=2$$
$$2x-x=1-3+2$$
$$x=0$$



$x_i=0$ nije rješenje

jer ne zadovoljava uvjet

Domaći zadatak !!!

Riješi jednačine:

1)

$$|3x-2|=1;$$
$$|5x+4|=7;$$
$$|5-2x|=\frac{3}{4};$$

2)

$$|x+2|=2x-1;$$
$$|2x-3|=3x-2;$$

3)*

$$|x+1|+|x+2|=3;$$
$$|2x-1|+|x-3|=1;$$